

L'idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires

Ph. Maisonobe
Université de Nice Sophia Antipolis
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
Unité Mixte de Recherche du CNRS 7351
Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2

12 octobre 2016

Introduction

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Une famille $\{H_1, \dots, H_p\}$ d'hyperplans vectoriels de V deux à deux disctintcs définit un arrangement $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ de V . Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit l_i une forme linéaire sur V de noyau H_i . Ces formes sont définies à un coefficient de proportionalité près.

Suivons les notations du livre de P. Orlik et H. Terao [O-T]. Notons $L(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersections non vide d'éléments de $\{H_1, \dots, H_p\}$. Si $X \in L(\mathcal{A})$, nous notons $J(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} ; X \subset H_i\}$, $r(x)$ le codimension de X et \mathcal{A}_X l'arrangement d'hyperplans défini par $\{H_i\}_{i \in J(X)}$. Un arrangement \mathcal{A} est dit irréductible s'il n'est pas isomorphe à un produit d'arrangements non vides. Soit $S = S(V^*)$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel dual de V . Nous notons $\text{Der}_{\mathbf{C}}(S)$ le S -module des dérivations de S sur \mathbf{C} et $D(\mathcal{A})$ le sous-module de $\text{Der}_{\mathbf{C}}(S)$ formé des dérivations χ vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, p\} : \chi(f_i) \in l_i S$. Nous disons que l'arrangement \mathcal{A} est libre si $D(\mathcal{A})$ est un S -module libre.

En dimension 2, tous les arrangements d'hyperplans sont libres. En dimension quelconque, les arrangements définis par des sous-groupes de réflexion du groupe linéaire de V définissent des arrangements libres dits arrangements de réflexion. C'est le cas notamment des arrangements de tresse définis à partir des hyperplans invariants du groupe symérique.

Soit $A_V(\mathbf{C})$, l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels à coefficients dans S . Suivant la démonstration de Bernstein [Be], l'idéal des polynômes $b \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ vérifiant :

$$b(s_1, \dots, s_p) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1},$$

n'est pas réduit à zéro. Cet idéal ne dépend pas du choix des formes linéaires l_i qui définissent les hypersurfaces H_i . Nous notons cet idéal $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ et l'appelons l'idéal de Bernstein de \mathcal{A} . Le but de cet article est de déterminer cet idéal lorsque \mathcal{A} est un arrangement d'hyperplans linéaires libre.

Si $X \in L(\mathcal{A})$, notons \mathcal{A}_X l'arrangement d'hyperplans défini par $\{H_i\}_{i \in J(X)}$.

Théorème 1 Soit V un espace vectoriel et \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans linéaires libre. Alors l'idéal de Bernstein de \mathcal{A} est principal et engendré par le polynôme :

$$b_{\mathcal{A}}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L'(\mathcal{A})} \prod_{j=0}^{2(\text{card} J(X) - r(X))} \left(\sum_{i \in J(X)} s_i + r(X) + j \right) \quad ,$$

où $L'(\mathcal{A}) = \{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ est irréductible}\}$.

Exemple 1 (en dimension 2) : Soit l_1, l_2, \dots, l_p une famille de p formes linéaires homogènes sur \mathbf{C}^2 non deux à deux colinéaires. L'idéal de Bernstein de (l_1, \dots, l_p) est principal et engendré par le polynôme :

$$\prod_{i=1}^p (s_i + 1) \prod_{j=0}^{2(p-2)} (s_1 + \dots + s_p + 2 + j) \quad .$$

Exemple 2 (l'arrangement de Tresse) : Soit la famille $(x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ de formes linéaires sur \mathbf{C}^n . L'idéal de Bernstein de $(x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ est principal et engendré par le polynôme :

$$\prod_{I \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{k=0}^{(\text{card } I - 1)(\text{card } I - 2)} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n, i, j \in I} s_{i,j} + \text{card } I - 1 + k \right) \quad .$$

1 Compléments sur les champs de vecteurs logarithmiques

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . Désignons par \mathcal{O}_X son faisceau structural, \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans \mathcal{O}_X et Der_X le sous-faisceau des champs de vecteurs holomorphes.

Soit (f_1, \dots, f_p) des fonctions analytiques sur X et $F = f_1 \dots f_p$ leur produit. Notons H_i l'hypersurface formée par les zéros de la fonction f_i et H la réunion de ces hypersurfaces ou encore l'hypersurface formée par les zéros de F .

Soit $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$. Désignons par $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module engendré par $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ dans $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \frac{1}{F}]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ muni de sa structure naturelle de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module.

Notons par $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ le fibré cotangent à X . Posons :

$$\Omega_{f_1, \dots, f_p} = \left\{ \left(x, \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p \right) ; s_i \in \mathbf{C}, \text{ et } F(x) \neq 0 \right\}.$$

Cet ensemble Ω_{f_1, \dots, f_p} est sur $\pi^{-1}(X - H) \times \mathbf{C}^p$ une sous variété analytique lisse réduite de dimension $n + p$ définie par les équations :

$$\xi_i - \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)} = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, p\}.$$

Nous désignons par $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$ l'adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de Ω_{f_1, \dots, f_p} . Cette adhérence est donc un sous-espace irréductible de dimension $n + p$ de $T^*X \times \mathbf{C}^p$.

Suivant K. Saito, un champ de vecteurs holomorphe χ est logarithmique pour H si et seulement l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- en tout point lisse de H , le champ de vecteurs χ est tangent à H ,
- pour tout x_0 dans H , $\chi(F) \in F\mathcal{O}_{X, x_0}$.

Le sous-faisceau des dérivations logarithmiques pour H est noté $\text{Der}_X(H)$. De cette équivalence, résulte :

$$\text{Der}_X(H) = \cap_{i=1}^p \text{Der}_X(H_i).$$

Notation 1 Soit $\chi \in \text{Der}_X(H)$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$, soit b_j la fonction holomorphe telle que $\chi(f_j) = b_j f_j$. Nous noterons $\tilde{\chi}$ l'opérateur différentiel :

$$\tilde{\chi} = \chi - \sum_{j=1}^p b_j s_j \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$$

et par

$$\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) = \{ \tilde{\chi} ; \chi \in \text{Der}_X(H) \}.$$

Si P est un opérateur de \mathcal{D}_X , nous notons $\sigma(P)$ le symbole principal de P pour la filtration naturelle de \mathcal{D}_X par l'ordre des dérivations. En donnant à chaque s_i le poids un, cette filtration s'étend en une filtration de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ que nous appelons filtration dièse. Si $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, notons $\sigma^\sharp(P)$ le symbole principal de P pour cette filtration. C'est une fonction analytique sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$. Si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, nous noterons $\text{car}^\sharp(M)$ sa variété caractéristique relativement à la filtration dièse.

Proposition 1 a) $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$ est l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ d'ordre un pour la filtration dièse annulant $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$.

b) L'application :

$$\text{Der}_X(H) \longrightarrow \tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) \quad , \quad \chi \longmapsto \tilde{\chi}$$

est un isomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire.

Remarque 1 Si $U, V \in \text{Der}_X(H)$:

$$[U, V] = UV - VU \in \text{Der}_X(H) \quad \text{et} \quad [U, \tilde{V}] = \tilde{U}\tilde{V} - \tilde{V}\tilde{U} .$$

Notation 2 Nous notons $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$ engendré par les symboles des opérateurs de $\text{Der}_X(f_1, \dots, f_p)$. Si $(\delta_1, \dots, \delta_l)$ forme un système de générateurs du \mathcal{O}_X -Module $\text{Der}_X(H)$:

$$I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_l)) \quad .$$

Proposition 2 Si $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est un idéal premier :

1. la variété des zéros de $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$,
2. Nous avons (voir aussi [B-M-M1] pour le résultat général) :

$$\text{car}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad ,$$

3. pour tout système de générateurs $(\delta_1, \dots, \delta_l)$ du \mathcal{O}_X -Module $\text{Der}_X(H)$:

$$\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_l) \quad .$$

Preuve de 1 : En dehors de H , $\text{Der}_X(H)$ est un \mathcal{O}_{X-H} -Module libre engendré par les n dérivations :

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} s_j\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \quad ;$$

Il en résulte que la restriction de $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ à $X - H$ est un idéal réduit dont le lieu des zéros est la variété lisse Ω_{f_1, \dots, f_p} . Si $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est un idéal premier, sa variété des zéros est irréductible et est l'adhérence de Ω_{f_1, \dots, f_p} qui est par définition $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$.

Preuve de 2 : En fait ce résultat est vrai sans hypothèse sur f_1, \dots, f_p voir [B-M-M1]. Sous notre hypothèse, il se déduit simplement du premier résultat. En effet un calcul direct montre que si un opérateur P annule $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, son symbole dièse est nul sur Ω_{f_1, \dots, f_p} , donc sur $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$. Nous avons alors :

$$W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \subset \text{car}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) \subset W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad .$$

Preuve de 3 : Si $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ annule $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, $\sigma^\sharp(P)$ appartient à l'idéal $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_l))$. Ainsi, il existe $A_1, \dots, A_l \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, tel que

$$\sigma^\sharp(P) = \sigma^\sharp\left(\sum_{j=1}^p A_j \tilde{\delta}_j\right) \quad .$$

L'opérateur $P - \sum_{j=1}^p A_j \tilde{\delta}_j$ est un opérateur de degré dièse strictement inférieur à celui de P annulant toujours $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. La démonstration se fait alors par récurrence sur le degré dièse de P .

2 Le cas localement libre quasi-homogène

Soit X une variété analytique complexe de dimension n , (f_1, \dots, f_p) des fonctions analytiques sur X et $F = f_1 \dots f_p$ leur produit. Nous conservons les notations du paragraphe précédent. En particulier, H_i désigne l'hypersurface formée par les zéros de la fonction f_i et H la réunion de ces hypersurfaces ou encore l'hypersurface formée par les zéros de F .

Définition 1 F est dit localement quasi-homogène s'il existe au voisinage de tout point un système de coordonnées locales dans lequel $F = uG$ où u est une unité et G est un polynôme quasi-homogène à poids strictement positif. Le diviseur défini par F est alors dit localement quasi-homogène.

Proposition 3 Si F est localement quasi-homogène et que $\text{Der}_X(H)$ est localement libre l'idéal $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est un idéal premier.

Preuve : Tout d'abors nous remarquons que si u_1, \dots, u_p sont des unités de \mathcal{O}_X , $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est un idéal premier si et seulement si $I^\sharp(u_1 f_1, \dots, u_p f_p)$ est un idéal premier. Ainsi si $x_0 \in H$, pour montrer notre proposition au voisinage de x_0 , nous pouvons supposer $X = \mathbf{C}^n$, $x_0 = 0$ et F quasi-homogène à poids strictement positif. Ainsi, chaque f_i sont quasi-homogène à poids strictement positif. La preuve de la proposition se fait alors par récurrence. Le lemme clef, pour cette récurrence est la proposition de F. Castro, L. Narvaez et D. Mond :

Proposition 4 [C-N-M] Soit X une variété complexe de dimension n , soit D un diviseur localement quasi-homogène dans X et $p \in D$. Alors, il existe un voisinage ouvert U de p tel que pour tout $q \in U \cap D$, $q \neq p$, le germe de paire (X, D, q) est isomorphe au produit $(\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}, D' \times \mathbf{C}, (0, 0))$ où D' est un diviseur localement quasi-homogène.

Supposons la proposition que nous voulons démontrer vraie en dimension $n - 1$. Supposons $X = \mathbf{C}^n$ et $0 \in H$. Il faut montrer que le germe de l'idéal $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est un idéal premier. Soit $\delta_1, \dots, \delta_n$ une base de $\text{Der}_X(H)$, nous avons suivant la remarque 2 :

$$I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n)) \quad .$$

Les composantes irréductibles de la variété des zéros de $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ sont donc de dimension supérieure à $n + p$. En dehors de H , $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ coïncide avec l'idéal premier :

$$(\xi_i - \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} s_j) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \quad ;$$

Ainsi, $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$ est une composante irréductible de la variété des zéros de $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$. Si cette variété avait d'autres composantes irréductibles, comme par récurrence $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est premier en dehors de $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p$, ses autres composantes irréductibles seraient contenues dans $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p$. Soit alors χ le champ de quasi-homogénéité de F et d_i le degré d'homogénéité de chaque f_i . Nous avons $\chi \in \text{Der}_X(H)$ et $\tilde{\chi} = \chi - \sum_{i=1}^p d_i s_i$. Il en résulte que :

$$(\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p) \cap V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) \subset T_0^*X \times \left(\sum_{i=1}^p d_i s_i = 0 \right) \quad .$$

Cette composante serait donc contenue dans un espace de dimension $n + p - 1$. Nous en déduisons :

$$V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) = W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad .$$

Il en résulte que $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ est une suite régulière. Comme $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est réduit en dehors de H , il résulte que $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ est réduit et donc premier.

Corollaire 1 *Si F est localement quasi-homogène et que $\text{Der}_X(H)$ est localement libre, nous avons pour toute base $\delta_1, \dots, \delta_n$ de $\text{Der}_X(H)$:*

1. $I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ est un idéal premier et sa variété des zéros est $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$,
2. $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$,
3. $(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n))$ est une suite régulière de \mathcal{O}_{T^*X} ,
4. $(F, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$,
5. $\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$,
6. Soit $\dot{f}_1^{s_1} \dots \dot{f}_p^{s_p}$ la classe de $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ dans le quotient $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} / \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$,
alors : $\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} \dot{f}_1^{s_1} \dots \dot{f}_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](F, \tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$.

Preuve : Les points 1,2,5,6 résultent directement ou facilement de ce qui précède. Pour le point 3, rappelons suivant par exemple [B-M-M1] ou [B-M-M2] que $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \cap (s_1 = \dots = s_p = 0)$ s'identifie à sous-variété lagrangien de T^*X . Ses composantes irréductibles sont donc de dimension n . Il en résulte que

$(s_1, \dots, s_p, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ est une suite régulière. Le résultat s'en déduit. Pour le point 4, cela résulte du fait que par définition de $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$: si $u \in \mathcal{O}_X$ et $Fu \in I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ alors $u \in I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons F est localement quasi-homogène et que $\mathrm{Der}_X(H)$ est localement libre. Notons $\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$ la suite de morphisme de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules à gauche :

$$\longrightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^k(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \xrightarrow{\epsilon_{-k}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^{k-1}(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \longrightarrow$$

ou le morphisme ϵ_{-k} est défini par :

$$\epsilon_{-k}(P \otimes \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^i P \eta_i \otimes \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} P \otimes [\eta_i, \eta_j] \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_j \wedge \dots \wedge \eta_k .$$

Suivant [N], $\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$ constitue un complexe de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules à gauche.

Proposition 5 *Sous les hypothèses F localement quasi-homogène et $\mathrm{Der}_X(H)$ localement libre, le complexe $\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$ est une résolution libre de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche du Module $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$.*

Preuve : Ce complexe de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche est naturellement filtré . Son gradué s'identifie au complexe de Koszul de la suite régulière $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$. Il n'a donc de la cohomologie qu'en degré zéro. Le morphisme d'augmentation naturel (voir le corollaire 1) :

$$\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \longrightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

est donc un complexe sans cohomologie.

Notation 3 *Soit $\chi \in \mathrm{Der}_X(H)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, la fonction holomorphe b_i telle que $\chi(f_i) = b_i f_i$. Nous noterons $\tilde{\chi}$ l'opérateur différentiel :*

$$\tilde{\chi} = \chi + \sum_{j=1}^p b_j (s_j + 1) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] ;$$

et par

$$\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) = \{\tilde{\chi} ; \chi \in \mathrm{Der}_X(H)\} .$$

Dans la suite, nous supposons que quitte à diminuer X , $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est une base de $\text{Der}_X(H)$. Il s'en suit que $(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$ est une base du $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$. De même, $(\tilde{\tilde{\delta}}_1, \dots, \tilde{\tilde{\delta}}_n)$ est une base du $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre $\tilde{\tilde{\text{Der}}}_X(f_1, \dots, f_p)$.

Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n . Comme δ_i appartient à $\text{Der}_X(H)$, il existe des $m_{i,j} \in \mathcal{O}_X$ tels que :

$$\delta_i(f_j) = m_{i,j} f_j .$$

Nous ne déduisons que $\delta_i(F) = (\sum_{j=1}^n m_{i,j})F$. De plus, comme $[\delta_i, \delta_j]$ appartient à $\text{Der}_X(H)$, il existe des $\alpha_k^{i,j} \in \mathcal{O}_X$ tels que :

$$[\delta_i, \delta_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \delta_k .$$

Nous en déduisons :

$$[\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \tilde{\delta}_k \quad \text{et} \quad [\tilde{\tilde{\delta}}_i, \tilde{\tilde{\delta}}_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \tilde{\tilde{\delta}}_k .$$

Notons que l'on : $\alpha_k^{i,j} = -\alpha_k^{j,i}$.

Lemme 1 *Si ${}^t\delta_i$ désigne la transposée de l'opérateur δ_i :*

$${}^t\tilde{\delta}_i = -\tilde{\delta}_i + \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k} .$$

Preuve : Cela repose sur un lemme établi par F. Castro et J.-M. Ucha dans [C-U] qui assure que pour tout $0 \leq i \leq n$:

$${}^t\delta_i = -\delta_i - m_i + \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k} ,$$

Le lemme s'en déduit puisque $\tilde{\delta}_i = \delta_i - \sum_{j=1}^p m_{i,j} s_j$ et $\tilde{\tilde{\delta}}_i = \delta_i + \sum_{j=1}^p m_{i,j} (s_j + 1)$.

Soit M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent. Notons Ω_X^n le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur X . Le dual de M est le complexe $RHom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(M, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])$ transformé en un complexe de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche par application du foncteur $Hom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], -)$. Nous noterons M^* ce complexe. Ses groupes de cohomologie sont les

$$Hom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], Ext_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(M, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])) .$$

Proposition 6 *Sous les hypothèses F localement quasi-homogène et $Der_X(H)$ localement libre :*

$$(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})^* \simeq \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1}[-n] .$$

Preuve : Suivant [M], le nombre grade de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est égal à n . Il résulte alors de la proposition 5 que le dual de M est concentré en degré n . Calculons ce groupe de cohomologie. Explicitons pour cela :

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^n(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p)) \xrightarrow{\epsilon_{-n}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^{n-1}(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p)) .$$

Si $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est une base de $Der_X(\text{Log } H)$, $\Lambda^n(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p))$ est un $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre de base $\tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n$ et $\Lambda^{n-1}(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p))$ un $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre de base $(\tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n)_{1 \leq i \leq n}$. Nous obtenons :

$$\epsilon_{-n}(1 \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tilde{\delta}_i \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n + \sum_{1 \leq u < v \leq n} (-1)^{u+v} \otimes [\delta_u, \delta_v] \wedge \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_u \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_v \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n$$

Et nous obtenons :

$$\epsilon_{-n}(1 \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n) = (-1)^{i-1} (\tilde{\delta}_i - \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k}) \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n .$$

comme la transposée de l'opérateur $\tilde{\delta}_i - \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k}$ est $-\tilde{\delta}_i$. Nous obtenons que M^* est isomorphe au complexe concentré en degré n :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)}[-n] .$$

Il reste à utiliser le point 4 du corollaire 1.

Remarque 2 *Sous les hypothèses de la proposition 6, nous pouvons en fait montrer l'existence d'un isomorphisme canonique entre*

$$Hom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], RHom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\mathrm{Sp}^\bullet(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])) .$$

et

$$\mathrm{Sp}^\bullet(\tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))[-n] .$$

Proposition 7 *Sous les hypothèses F localement quasi-homogène et $\mathrm{Der}_X(H)$ localement libre :*

$$\left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^* \simeq \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-2} \dots f_p^{-s_p-2}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1}}[-n-1] .$$

Preuve : En effet, nous avons le triangle dans la catégorie dérivée :

$$(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})^* \rightarrow (\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1})^* \rightarrow \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^*[1] .$$

Il résulte de la proposition précédente l'isomorphisme :

$$\left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^* \simeq \left(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1} \rightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-2} \dots f_p^{-s_p-2} \right)[-n-1] .$$

La proposition s'en déduit.

Remarque 3 *Plaçons nous sous les hypothèses F localement quasi-homogène et $\mathrm{Der}_X(H)$ localement libre. Le $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module localement libre $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$ est stable par crochet. Nous pouvons lui associer un complexe de Spencer que nous noterons $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$. Suivant le corollaire 1, ce complexe est une résolution libre de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche*

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} .$$

Son dual s'identifie naturellement au complexe de Spencer correspondant $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$.

Soit $x_0 \in X$. Nous notons $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'idéal de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ des polynômes b vérifiant au voisinage de x_0 :

$$(*) \quad b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

Nous l'appelons idéal de Bernstein de (f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

Proposition 8 *Sous les hypothèses F localement quasi-homogène et $\text{Der}_X(H)$ localement libre . Le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche :*

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

est pur de nombre grade $n+1$ (tous ses sous-Modules ont pour nombre grade $n+1$). Pour tout x_0 , la racine de idéal de Bernstein de (f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 est principal. De plus :

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p) .$$

Preuve : Pour la pureté, suivant la remarque 5 de [M], il suffit de remarquer sous nos hypothèses :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]) \neq 0$$

implique $i = n+1$. Cela résulte directement de la proposition 7. La proposition 20 de [M] assure que la racine de l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$ est principal. Le résultat de symétrie résulte de la proposition 7.

3 L'idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires

Désormais $V = \mathbf{C}^n$ ou plus généralement un espace vectoriel de dimension n . Nous considérons H_1, \dots, H_p des hyperplans linéaires de V deux à deux distinctes. Ils définissent un arrangement d'hyperplans $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ de V . Notons toujours H la réunions de ces hyperplans. Tous supposons l'arrangement

défini par H libre. Pour $1 \leq i \leq n$, nous considérons l_i une forme linéaire homogène sur V de noyaux H_i , posons $L = l_1 \dots l_p$. Les formes linéaires l_i sont définies à un coefficient de proportionalité près. Le \mathcal{O}_X -Module, $D(\mathcal{A}) = \text{Der}_V(L)$ est donc un \mathcal{O}_V -Module libre.

Suivons les notations du livre de P. Orlik et H. Terao [O-T]. Notons $L(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersections non vide d'éléments de $\{H_1, \dots, H_p\}$. Si $X \in L(\mathcal{A})$, nous notons $J(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} ; X \subset H_i\}$, $r(x)$ le codimension de X et \mathcal{A}_X l'arrangement d'hyperplans défini par $\{H_i\}_{i \in J(X)}$. Suivant [O-T], si \mathcal{A} est libre, l'arrangement \mathcal{A}_X reste libre.

Notons E le champ d'Euler. Dans un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) de $X : E = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Le champ d'Euler est un champ de vecteur logarithmique : $E(L) = pL$ et $E(l_i) = l_i$. Suivant les notations du paragraphe précédent, nous avons $\tilde{E} = E - \sum_{j=1}^p s_j$.

Une dérivation χ est homogène de degré r , si elle s'écrit :

$$\chi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

où les $a_i(x)$ sont des polynômes homogènes de degré r .

Suivant [O-T], $\text{Der}_{\mathcal{O}_V}(L)$ admet une base de champs de vecteurs $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ homogènes. De plus, la suite $(\deg(\delta_1), \dots, \deg(\delta_n))$ des degrés d'homogénéité des δ_i est indépendant de la base et est appelée la suite des exposants de l'arrangement \mathcal{A} . Nous notons $\exp(\mathcal{A}) = (0^{e_0}, 1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots)$ pour signifier que dans une base, il y a e_i dérivations homogènes de degré i . De plus, nous avons $e_0 = 0$ si et seulement si le rang de la famille de formes linéaires (l_1, \dots, l_p) est égal à n . Si $e_0 > 0$, l'arrangement \mathcal{A} est produit de l'arrangement $(\mathbf{C}^{e_0}, \emptyset)$ et d'un arrangement libre $(\mathbf{C}^{n-e_0}, \mathcal{A}')$ où $\exp(\mathcal{A}') = (0^0, 1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots)$. Si e_0 est nul, l'arrangement \mathcal{A} est isomorphe au produit de e_1 arrangements libres irréductibles de rang maximal. L'arrangement \mathcal{A} est dit irréductible s'il n'est pas isomorphe à un produit d'arrangements non vides. Une caractérisation d'un arrangement irréductible est donc que son exposant e_1 soit égal à 1.

Soit $A_n(\mathbf{C})$, l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur V . Suivant la démonstration de Bernstein [Be], l'idéal des polynômes $b \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ vérifiant :

$$b(s_1, \dots, s_p) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1} ,$$

n'est pas réduit à zéro. Il ne dépend pas du choix des formes linéaires l_i qui définissent les hypersurfaces H_i . Nous notons cet idéal ou $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ et l'appelons l'idéal de Bernstein de \mathcal{A} .

Pour des raisons d'homogénéité : $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) = \mathcal{B}(0, l_1, \dots, l_p)$. De plus, si $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est une base de champs de vecteurs homogènes de $\text{Der}_{\mathcal{O}_V}(L)$, nous avons montré à la proposition 8 :

$$\text{Ann}_{A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]} l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} = \mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_l) .$$

De plus, l'arrangement \mathcal{A} est localement quasi-homogène. Nous avons donc suivant le paragraphe précédent :

$$\frac{\mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}}{\mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1}}$$

est pur de nombre grade $n+1$ (tous ses sous-Modules ont pour nombre grade $n+1$) et la racine de l'idéal $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ est principal. De plus, nous avons la propriété de symétrie :

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) .$$

Lemme 2 *Supposons que $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ soit un arrangement libre et irréductible. Soit r la codimension de $H_1 \cap \dots \cap H_p$, alors tout $b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ est multiple de*

$$\prod_{j=0}^{2(p-r)} (s_1 + \dots + s_p + n + j) .$$

Preuve : Comme l'arrangement est supposé irréductible $e_1 = 1$. Commençons par supposer $r = n$ ou encore $e_0 = 0$.

Soit $r = \inf \{i \in \exp(\mathcal{A}) ; i \geq 2\}$. Montrons tout d'abord que $\prod_{j=0}^{r+p-3} (s_1 + \dots + s_p + n + j)$ divise tout b de l'idéal de Bernstein. Soit v un polynôme homogène de degré $0 \leq d \leq r - 2$. Si $b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$, en multipliant l'identité fonctionnelle associée à b par $vl_1 \dots l_k$ où $k \leq p - 1$, nous obtenons en particulier :

$$b(s_1, \dots, s_p) vl_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}+1} l_{k+2}^{s_{k+2}} \dots l_p^{s_p} ,$$

Donc, il existe un opérateur différentiel $P \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$ tel que

$$b(s_1, \dots, s_p)v - Pl_{k+1} \in \text{Ann}_{A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]} l_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}} \dots l_p^{s_p} .$$

Ainsi, il existe des $A_i \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$ tel que :

$$(*) \quad b(s_1, \dots, s_p)v = Pl_{k+1} + A_1 \tilde{\delta}_1(s_1 + 1, \dots, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_p) + \dots + A_n \tilde{\delta}_n(s_1 + 1, \dots, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_p) .$$

Un opérateur de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}[s_1, \dots, s_p]$ (resp $A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$) s'écrit de façon unique :

$$P = \sum_{\alpha \in A} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} c_\alpha(s_1, \dots, s_p) ,$$

où $c_\alpha(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0}[s_1, \dots, s_p]$ (resp. $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p]$) et A est un ensemble fini de \mathbf{N}^n . Cette écriture sera dite l'écriture à droite de P . Nous appelons $c_0(s_1, \dots, s_p)$ le terme constant de l'écriture à droite de P .

Prenons la partie homogène de degré d des deux termes constants de l'écriture à droite dans l'égalité (*). Sachant que l'on peut supposer que δ_1 est le champ d'Euler E , nous obtenons :

$$b(s_1, \dots, s_p)v = pl_{k+1} + \left(\sum_{j=1}^p s_j + k + d + n \right) a_1 l ,$$

où p et a_1 sont des polynômes homogènes de degré $d - 1$ (resp. d) et plus précisément les parties homogènes de degré $d - 1$ (resp. d) des termes constants à droite de P et A_1 . En choisissant v non multiple de l_{k+1} , nous obtenons : $\sum_{j=1}^p s_j + k + d + n$ divise b . Ainsi, $\prod_{j=0}^{r+p-3} (s_1 + \dots + s_p + n + j)$ divise b . Or $n + p + r - 3 \geq p - n$,

il reste à utiliser la propriété de symétrie de $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$.

Si $e_0 > 0$, $r = n - e_0$: L'arrangement est le produit de l'arrangement vide sur \mathbf{C}^{e_0} et d'un arrangement (H'_1, \dots, H'_p) de \mathbf{C}^{n-e_0} d'exposant $(0, 1, e_2, \dots)$. Il est facile de montrer que l'idéal de Bernstein de l'arrangement $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ coïncide avec celui de l'arrangement $\mathcal{A}(H'_1, \dots, H'_p)$. Il reste à utiliser le premier cas $r = n$ que nous venons de traiter.

Proposition 9 (*diviseur évident*) *Supposons que $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ soit un arrangement libre, tout polynôme de Bernstein est multiple de :*

$$b_{de}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{2(\text{card} J(X) - r(X))} \left(\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

Preuve : Soit $X \in L(\mathcal{A})$ tel que \mathcal{A}_X soit irréductible. Nous savons voir [O-T] que \mathcal{A}_X reste un arrangement libre. Pour $j \notin J(X)$, l_j est non identiquement nul sur X . Nous pouvons trouver $x_0 \in X$ tel que pour $j \notin J(X)$, $f_j(x_0) \neq 0$ et donc tel que le germe f_j en x_0 soit inversible. Il est alors facile de montrer que l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$ est engendré par les polynômes de l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(x_0, (f_j)_{j \in J(X)})$. Tous ces polynômes sont d'après le lemme 2 multiples de :

$$\prod_{j=0}^{2(\text{card} J(X) - r(X))} \left(\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right),$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 10 (*multiple évident*) *Soit $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ un arrangement d'hyperplan linéaire **non nécessairement libre**, il existe un entier N assez grand tel que :*

$$b_{me}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^N \left(\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

soit un polynôme de Bernstein de $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$.

Preuve : Nous pouvons supposer l'arrangement $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ irréductible et que l'intersection des hyper-surfaces de l'arrangement soit réduit au vecteur nul. Ainsi, $r(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n$.

Soit $i_1, \dots, i_n \in \mathbf{N}$ tels que $i_1 + \dots + i_n = k$. Notons $C_k^{i_1, \dots, i_n}$ la suite d'entiers définie par récurrence par :

$$C_k^{i_1, \dots, i_n} = C_{k-1}^{i_1-1, \dots, i_n} + \dots + C_{k-1}^{i_1, \dots, i_n-1}, \quad C_1^{0, \dots, 0^1, 0, \dots, 0} = 1.$$

Désignons par (x_1, \dots, x_n) le système de coordonnées canoniques de V . Nous vérifions par récurrence :

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - j \right) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}}.$$

D'où par transposition :

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + j + n \right) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Il en résulte :

Lemme 3 *Si la famille de formes linéaires (l_1, \dots, l_p) est de rang n , nous avons :*

$$\prod_{j=0}^{k-1} (s_1 + \dots + s_p + n + j) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) (l_1, \dots, l_p)^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}.$$

Notons $L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ l'ensemble des $X \in L(\mathcal{A})$ tels que $r(X) = n - 1$. Nous avons par récurrence :

$$(l_1, \dots, l_p)^{p-n+1} \in \left(\prod_{j \notin J(X)} l_j \right)_{X \in L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))}.$$

Il en résulte que pour tout k il existe un entier K assez grand tel que :

$$\prod_{j=0}^{K-1} (s_1 + \dots + s_p + n + j) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in \left(\sum_{i_1 + \dots + i_n = K} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) \left(\prod_{j \notin J(X)} l_j \right)_{X \in L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))}^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}.$$

Par récurrence sur la dimension, pour tout $X \in L''(\mathcal{A})$, il existe N_X entier assez grand tel que :

$$\prod_{Y \in L(\mathcal{A}_X) ; \mathcal{A}_Y \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{N_X} \left(\sum_{j \in J(Y)} s_j + r(Y) + j \right) \prod_{j \in J(X)} l_j^{s_j} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \prod_{j \in J(X)} l_j^{s_j+1}.$$

Donc, si k est un entier assez grand :

$$\prod_{Y \in L(\mathcal{A}_X) ; \mathcal{A}_Y \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{N_X} \left(\sum_{j \in J(Y)} s_j + r(Y) + j \right) \left(\prod_{j \notin J(X)} l_j \right)^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1},$$

La proposition s'en déduit.

Théorème 2 *Supposons que $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ soit un arrangement libre d'hyperplans linéaires. Alors, l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ est principal de générateur :*

$$\prod_{X \in \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{2(\text{card}J(X)-r(X))} \left(\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

Preuve : Suivant la proposition 8, la racine de $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ est principal. Considérons un générateur c de cet idéal. l'idéal $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ vérifie la propriété de symétrie :

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)).$$

Sa racine vérifie donc cette propriété. Il en résulte que $c(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2)$ est égal à plus ou moins $c(s_1, \dots, s_p)$.

Puisque b_{de} est un polynôme réduit, le polynôme c est clairement multiple du polynôme b_{de} . Il divise d'autre part b_{me} . Supposons alors que $\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j$ avec $j > 2(\text{card}J(X) - r(X))$ soit un facteur de c . Le polynôme c aurait donc comme facteur :

$$- \sum_{j \in J(X)} s_j - 2\text{card}J(X) + r(X) + j = - \left(\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + 2(\text{card}J(X) - r(X)) - j \right).$$

C'est impossible puisque comme $r(X) + 2(\text{card}J(X) - r(X)) - j < 0$ et que ce facteur n'apparait pas dans b_{me} . Il en résulte que la racine de $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ est principal de générateur b_{de} .

Ecrivons $b_{me}(s_1, \dots, s_p) = b_{de}(s_1, \dots, s_p)a(s_1, \dots, s_p)$. Regardons le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ sous-Module :

$$L' = b_{de}(s_1, \dots, s_p) \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \subset L = \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} / ; .$$

Ce $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module est supporté par les zéros du polynôme $a(s_1, \dots, s_p)$. Nous venons de voir que L est supporté par les zéros du polynôme $b_{de}(s_1, \dots, s_p)$. Il en résulte que la dimension de la variété caractéristique de L' est strictement inférieur à celle de L . Cela contredit la pureté de L établie à la proposition 8.

Terminons par un résultat sur les composantes irréductibles de $W_{l_1, \dots, l_p}^\sharp \cap H$. Soit $X \in L(\mathcal{A})$. Notons pour $V = \mathbf{C}^n$:

$$\Omega_{T_X^* \mathbf{C}^n, (l_j)_{j \notin J(X)}} = \left\{ (x, \xi + \sum_{j \notin J(X)} s_j \frac{dl_j}{l_j}, (s_j)_{j \notin J(X)}) ; (x, \xi) \in T_X^* \mathbf{C}^n \text{ et } \prod_{j \notin J(X)} l_j(x) \neq 0 \right\} .$$

Notons $W_{X, (f_j)_{j \notin J(X)}}^\sharp$ son adhérence. C'est un ensemble irréductible de dimension de $T^* \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{p - \text{card} J(X)}$ de dimension $n + p - \text{card} J(X)$ qui s'identifie à $W_{f_1|_X, \dots, f_p|_X}^\sharp \times \mathbf{C}^{n-r(X)}$.

Sans aucune hypothèse suivant [B-M-M1], les composantes irréductibles de $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \cap H$ sont de dimension $n + p - 1$ et se projette apr la projection $(x, \xi, s) \mapsto s$ sur des hyperplans linéaires appelés pentes de f_1, \dots, f_p .

Proposition 11 *Supposons que $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ soit un arrangement libre d'hyperplans linéaires. Les composantes irréductibles de $W_{l_1, \dots, l_p}^\sharp \cap H$ sont les :*

$$W_{X, (l_j)_{j \notin J(X)}}^\sharp \times \left\{ (s_j)_{j \in J(X)} \in \mathbf{C}^{\text{card} J(X)} ; \sum_{j \in J(X)} s_j = 0 \right\}$$

où X parcourt les éléments de $L(\mathcal{A})$ tels que \mathcal{A}_X soit irréductible.

Preuve : Soit $X_0 = H_1 \cap \dots \cap H_p$. Soit (e_0, e_1, \dots) les exposants de l'arrangement \mathcal{A} . Si $e_1 > 1$, aucune composante irréductible de $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$ n'est contenue dans X_0 . Si $e_1 = 1$:

$$W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap X_0 = T_{X_0}^* \mathbf{C}^n \times \{(s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{C}^p ; \sum_{j=1}^p s_j = 0\} .$$

Pour démontrer cela à un facteur trivial près, nous pouvons supposer $e_0 = 0$. Le résultat provient alors du fait que $W_{l_1, \dots, l_p}^\#$ est défini par l'idéal $(\sigma^\#(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\#(\tilde{\delta}_n))$ où $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est une base de $\text{Der}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}}(L)$. et que le champ d'Euler peut être choisi dans cette famille de générateurs. Dans ce cas, $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$ est de dimension $n + p - 1$. C'est donc une composante irréductible de $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$.

Soit $X \in L(\mathcal{A})$. Cherchons les composantes irréductibles de $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$ contenues dans X et non contenues dans $X' \subset X$ et $X' \in L(\mathcal{A})$. Une telle composante est contenue dans l'adhérence de :

$$\{(x, \xi + \sum_{j \notin J(X)} s_j \frac{dl_j}{l_j}, s_1, \dots, s_p) ; (x, \xi, (s_l)_{l \in J(X)}) \in W_{(l_j)_{j \in J(X)}}^\# \cap X\} .$$

D'après le cas précédent, si \mathcal{A}_X n'est pas irréductible cette adhérence n'a pas la bonne dimension . Et si \mathcal{A}_X est irréductible, cette adhérence s'identifie à :

$$W_{X, (l_j)_{j \notin J(X)}}^\# \times \{(s_j)_{j \in J(X)} \in \mathbf{C}^{\text{card} J(X)} ; \sum_{j \in J(X)} s_j = 0\}$$

qui est de dimension $n + p - 1$. C'est donc une composante irréductible de $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$.

Remarque 4 Nous retrouvons que si $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ est un arrangement libre d'hyperplans linéaires, les pentes de l_1, \dots, l_p sont les hyperplans de \mathbf{C}^p d'équations $\sum_{j \in J(X)} s_j = 0$ où X parcourt les éléments de $L(\mathcal{A})$ tels que \mathcal{A}_X soit irréductible.

Références

- [Be] Bernstein J., The analytic continuation of generalised functions with respect a parameter, Funz. Anal. Appl. 6, (1972), 26-40.
- [B-M-M1] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Constructibilité de l'idéal de Bernstein, Advanced Studies in Pure Mathematics 29, Singularities - Sapporo 1998 (2000) 79-95.
- [B-M-M2] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Éventails associés à des fonctions analytiques, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 238 (2002) 61-71.
- [C-U] F. Castro-Jimenez, J. M. Ucha, Free Divisors and Duality for D-Modules, Tr. Mat. Inst. Steklova, 2002, Volume 238, 97105
- [C-N-M] F. Castro-Jimenez, L. Narvaez-Macarro, D. Mond, Cohomologie of the complement of a free divisor, Transaction Of The American Mathematical Society, Volume 348, Number 8, August 1996
- [N] L. Narvaez-Macarro, A duality approach to the symmetry of BernsteinSato polynomials of free divisors, Advances in Mathematics, Volume 281, 20 August 2015, Pages 1242-1273
- [M] Maisonobe Ph., L'idéal de Bersntein et ses pentes. HAL Id : hal-01285562, version 1
- [O-T] Orlik P., Terao H., Arrangements of Hyperplanes, Grundenleheren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer Verlag.